Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XI-A – SOLUŢII

Subiectul 1. Fie $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ cu $x < y$, atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m < n$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x = \frac{m}{p}$ şi $y = \frac{n}{p}$. Din enunţ, şirul $(f(n \cdot \frac{1}{p}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător, de unde $f(x) \leq f(y)$ şi în consecinţă f este crescătoare pe $\mathbb{Q}_+^*$. .... 3 puncte

Pentru $x, y \in (0, \infty)$ cu $x < y$ există şirurile $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $x < r_n < r'_n < y$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = y$. ....2 puncte

Cum f este crescătoare pe $\mathbb{Q}_+^*$ şi continuă pe $\mathbb{R}_+^*$ deducem că $f(x) \leq f(y)$ ceea ce implică monotonia funcţiei pe $\mathbb{R}_+^*$. ....2 puncte

Subiectul 2. Dacă $A = B^{-1} \cdot \overline{B}$ atunci

$$A \cdot \overline{A} = B^{-1} \cdot \overline{B} \cdot \overline{(B^{-1})} \cdot B = B^{-1} \cdot \overline{B}(\overline{B})^{-1} \cdot B = I_n,$$

deci $A^{-1} = \overline{A}$. .... 2 puncte

Dacă $A^{-1} = \overline{A}$ vom căuta matricea B de forma $B = \alpha \cdot \overline{A} + \beta \cdot I_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. .... 1 punct

Avem:

$$A = B^{-1} \cdot \overline{B} \Leftrightarrow B \cdot A = \overline{B} \Leftrightarrow (\alpha \cdot \overline{A} + \beta \cdot I_n) \cdot A = \overline{\alpha} \cdot A + \overline{\beta} \cdot I_n$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \overline{A} \cdot A + \beta \cdot A = \overline{\alpha} \cdot A + \overline{\beta} \cdot I_n \Leftrightarrow \alpha \cdot I_n + \beta \cdot A = \overline{\alpha} \cdot A + \overline{\beta} \cdot I_n.$$

Alegem $\beta = \overline{\alpha}$ şi egalitatea este verificată pentru $B = \alpha\overline{A} + \overline{\alpha}I_n$, $\alpha \in \mathbb{C}$. .... 2 puncte

Să punem condiţia ca B să fie inversabilă. Pentru $\alpha \neq 0$, avem:

$$\det B = \det(\alpha\overline{A} + \overline{\alpha}I_n) = \alpha^n \det\left(\overline{A} + \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}I_n\right).$$

Dacă rădăcinile polinomului caracteristic $f_{\overline{A}}(z) = \det(zI_n - \overline{A})$ sunt $z_1, z_2, \ldots, z_n$, alegem $\alpha \in \mathbb{C}^*$ astfel ca $\frac{\overline{\alpha}}{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{-z_1, -z_2, \ldots, -z_n\}$ şi atunci $\det B \neq 0$, deci B este inversabilă. .... 2 puncte

Subiectul 3. Din $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq f'(c)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$ deducem că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x \cdot f'(c)$ este injectivă. .... 3 puncte

Injectivitatea funcţiei g conduce la stricta monotonie a acestei funcţii, de unde $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $g'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $f'(x) \geq f'(c)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $f'(x) \leq f'(c)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. .... 2 puncte

In consecinţă c este punct de extrem (global) al funcţiei f' din interiorul domeniului de definiţie şi atunci, via teorema lui Fermat $f''(c) = 0$. .... 2 puncte

Subiectul 4. Fie $P(x) = \det(A + xI_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \det A$. .... 1 punct

Coeficienţii a_k reprezintă suma minorilor diagonali de ordin k ai matricei A, ... 1 punct

deci determinanţi ai unor matrice antisimetrice. Rezultă că $a_i \geq 0$, pentru orice i. .... 3 puncte

Cu inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz, $P(x) \cdot P(y) \geq P(\sqrt{xy}))^2$, oricare ar fi $x, y \geq 0$. .... 2 puncte